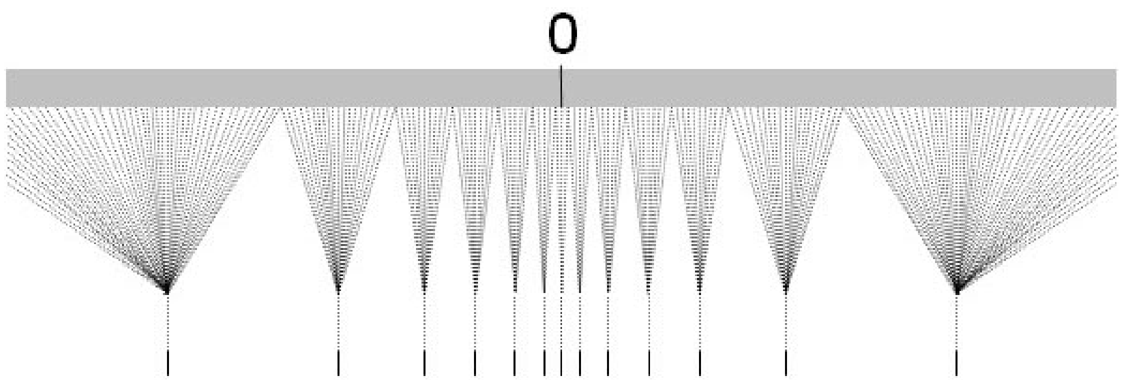
Aurizanda de Barros Levy

Números Reais no Ensino Secundário

Abordagens, Potencialidades Cognitivas e Sugestões Metodológicas



Licenciatura em Ensino de Matemática

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

Instituto Superior de Educação

Setembro 2007

Aurizanda de Barros Levy

Números Reais no Ensino Secundário

Abordagens, Potencialidades Cognitivas e Sugestões Metodológicas.

Trabalho Cientifico apresentado no ISE para obtenção do grau de Licenciado em Matemática para o Ensino, sob a orientação da **Doutora Tetyana Gonçalves**.

Setembro 2007

O júri,

Presidente

____

Orientador

____

Arguente

____

Local___________________________________

Data:___________________________________

Agradecimentos

Não podia apresentar, esse trabalho, sem agradecer os meus familiares que sempre me apoiaram, quando resolvi, nessa fase da minha vida, recomeçar a estudar.

Agradeço, todos os meus professores, que contribuíram nesses cinco anos para a minha formação e, directa ou indirectamente, me mostraram novos horizontes na área de Matemática.

À minha estimada, Orientadora **Tetyana Gonçalves,** um muito **Obrigado!**

Por, além de me ter dado todo o apoio cientifico para a realização deste trabalho, me ter dado também o estimulo e a confiança que necessitava.

Citação

“Os números são a ciência do tempo e a geometria a ciência do espaço”

Imamnuel Kant (Critica da Razão Pura)

Índice

-

I-INTRODUÇÃO

A Matemática, no seu sentido amplo, engloba infinitos componentes que fazem dela uma das ciências mais reais, completas e concretas, abstractas que contribuem para o desenvolvimento do intelecto humano.

Nessa ordem de ideias, o número real representa o elemento mais significativo e transcendente, por ser a essência e a expressão do pensamento Matemático.

É de notar que o conjunto $\mathbb{R}$ é a base de toda a Matemática, pois é conjunto mais estudado em todos os níveis de ensino, nas áreas de Álgebra, Teoria dos Números, Análise Matemática e Geometria. Mesmo a sua extensão $\mathbb{C}$ tem como origem o conjunto $\mathbb{R}$.

É muito importante introduzir a noção correcta desse conjunto ($\mathbb{R}$) no Ensino Secundário, para evitar constrangimentos conceptuais nos posteriores estudos e a sua aplicação nas referidas áreas da Matemática.

Neste sentido deve-se identificar claramente os pré-requisitos necessários para tal processo que percorre todo o Ensino Secundário.

Seguindo a ideia indutiva, a introdução do conjunto $\mathbb{R}$ está subdividida em etapas (ciclos), cada uma das quais enriquece a sua antecedente em complexidade e plenitude, chegando assim ao fim do estudo com a visão clara e abrangente sobre $\mathbb{R}$.

A passagem de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ contém momentos "delicados", muito importantes que o professor deve saber apresentar de uma forma acessível aos alunos (ao nível de abstracção que eles se encontram).

O professor, tendo conhecimento ao nível da Matemática Superior, do conceito do "Número - Conjunto", deve conjugá-lo com a imaginação dos alunos, o que não é tarefa fácil.

O presente trabalho tem como um dos objectivos propor algumas sugestões metodológicas na introdução e consideração (aos níveis do 1º e 2º ciclos) desse conceito. Além de aprofundar o estudo desse assunto, temos o intuito de estender os horizontes do conhecimento do aluno finalista do Ensino Secundário.

Mesmo tendo um «leque diversificado» de sugestões e exercícios, o trabalho não está completo. As ideias propostas chamam à discussão entre os peritos da área. Estamos abertos para isso, pois, a partir de pontos de vista diferentes e diversas posições, é que surgem ideias brilhantes.

O presente trabalho é essencialmente prático e pode ser consultado pelos professores ao ministrar o conteúdo em questão.

II-HISTÓRIA

Ao contrário do que sucedia com os números negativos, onde o cálculo obrigou a que se introduzisse os novos conceitos, e sem que se pensasse muito sobre a sua essência e fundamento se operava com eles, afirmando-se a sua existência, sobre todo o reconhecimento da sua utilidade, historicamente, a origem do conceito do número irracional encontra-se sempre na intuição geométrica e nas necessidades da mesma geometria com os números reais.

Pitágoras foi o primeiro a considerar que no eixo das abcissas está marcado o conjunto dos números racionais, que é denso em todas as partes. Para além desses pontos *existem outros sobre o dito eixo*.

Se temos um triângulo rectângulo cujos catetos têm comprimento 1, o da hipotenusa é igual a $\sqrt{2}$ e este não é um número racional, pois se escrevemos $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros primos entre si, facilmente se chega a uma contradição com resultados conhecidos da divisibilidade de números inteiros.

Os matemáticos gregos posteriores estudaram além destas irracionalidades sensíveis, outras cada vez mais complicadas; encontrando-se em Euclides, tipos como $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e outras semelhantes. No geral pode dizer-se que se limitaram essencialmente a todas as irracionais que se obtêm pela aplicação repetida da extracção de raízes quadradas, e que por ela se pode construir com a régua e o compasso; mas nunca chegaram a ter a ideia geral do número irracional. Os gregos não possuíam qualquer procedimento que os permitisse estabelecer estes números partindo dos números racionais o que facilitaria o seu estudo numa forma semelhante à utilizada actualmente. Não obstante, o número real não necessariamente racional era-lhes familiar*;* só que tinha para eles um sentido completamente distinto do nosso, visto que não utilizavam letras para designar os números em geral. O que eles faziam - e Euclides o expôs sistematicamente - era considerar *razões entre dois segmentos rectilíneos quaisquer*, e operavam com elas de um modo análogo ao actual com os números reais, e até se encontram definições em Euclides que se harmonizam perfeitamente com a moderna teoria do número irracional. E chegaram a mais; distinguiam-na dos números naturais.

A ideia geral do número irracional fez a sua aparição no final do século XVI, como consequência da introdução das fracções decimais, cujo uso se generalizava já então como motivo da formação das tábuas logarítmicas.

Só ao chegar aos anos 60 do século XIX apareceu a necessidade de formular aritmeticamente, de maneira mais precisa, os fundamentos dos números irracionais*,* sendo

Weierstrass o primeiro que abriu caminho a estas investigações naqueles anos nas suas aulas, explicadas na Universidade de Berlim.

Depois, no ano 1872, *G. Cantor*, o fundador da teoria de conjuntos, deu em Halle uma teoria geral dos ditos números e em simultâneo e independentemente dele, houve outro em Brunswick onde R. Dedeking introduz conceito de *corte no campo dos números racionais.*

III-CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS GERAIS

3.1-COMPONENTE TEÓRICA

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os inteiros e os fraccionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

Existem dois tipos de números irracionais**:** os algébricos e os transcendentes.

Os números irracionais algébricos são as raízes inexactas dos números racionais, a exemplo de $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{103}$,...,etc, ou qualquer outra raiz inexacta.

Já os números irracionais transcendentes complementam aqueles irracionais algébricos, sendo os exemplos mais famosos de números irracionais transcendentes, o número $\boldsymbol{\pi}$ (pi), o número de Euler e, cujos valores aproximados com duas decimais são respectivamente **3,14 e 2,72**.

O número $\boldsymbol{\pi}$ representa a razão do comprimento de qualquer circunferência dividido pelo diâmetro da mesma circunferência e o número e é a base do sistema de logaritmos neperianos.

Os números reais são números usados para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fracção decimal possivelmente infinita, como 3,141592 (...). Os números reais têm uma correspondência biunívoca com os pontos de uma recta.

Definição 3.1

(Recta real)

A recta em que está marcada a origem (o ponto O), o sentido e a escala, chama-se **Recta Real** ou **Recta Numérica.**

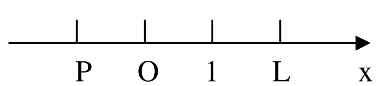


Figura 1

O ponto O “separa” (ponto separador) a recta em duas semi-rectas:

$\overrightarrow{OL}$ - semi-recta positiva

$\overrightarrow{OP}$ - semi-recta negativa

A cada ponto da recta associa-se um único número real pela seguinte regra:

(i) Ao ponto O corresponde o número 0 (zero).

(ii) A cada ponto A do semi-eixo positivo corresponde um número positivo, onde a – comprimento do segmento AO

(iii) A cada ponto B do semi-eixo negativo corresponde um número – b, onde $|b|$ – comprimento do segmento OB.

Além disso, aos pontos distintos da recta real correspondem os números reais, e não existe nenhum número real que não se associa a um ponto da referida recta.
Desse modo, entre o conjunto dos números reais e os pontos da recta numérica existe uma bijecção, quer dizer, que são equipotentes.

Definição 3.2

Denomina-se corpo dos números reais à colecção dos elementos pertencentes à conclusão dos racionais, formado pelo corpo de fracções associado aos inteiros (números racionais) e à norma associada ao infinito.

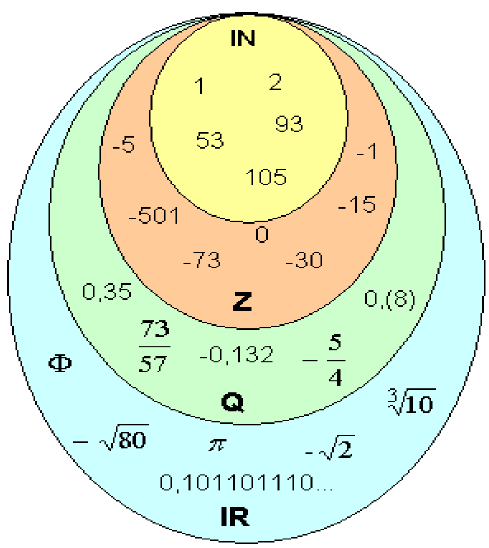


Figura 2

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

A relação entre os conjuntos acima referidos é utilizada e aceite no Ensino Secundário por abuso de linguagem, mas já a nível Superior essa relação não é recomendável.

3.2-OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS

No conjunto dos números reais encontram-se as operações básicas que são: Adição, Subtracção, Multiplicação e Divisão.

O corpo de números reais, $\mathbb{R}$, é uma estrutura algébrica munida de duas operações: a adição e a multiplicação

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

Definição 3.1.1

(Adição nos Números Reais)

A operação de adição de números reais é uma operação que associa a cada par de números reais a e b, chamadas parcelas, um único número real c, chamado soma de a e b definida por:

$$\begin{aligned} &+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(a,b) \to c = a+b \end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

a) Propriedade comutativa

Na adição de números reais, a ordem das parcelas não altera a soma. Se a e b são números reais, então a + b = b + a, por conseguinte diz-se que a adição de números reais, goza da **Propriedade comutativa**.

b) Propriedade associativa

Na adição de números reais, a forma de agrupar as parcelas não altera a soma. Se a e b são números reais, então a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c), por conseguinte diz-se que a adição de números reais, goza da **Propriedade associativa.**

c) Existência de um elemento identidade ou neutro

No conjunto dos números reais, o zero é o elemento identidade ou elemento neutro da adição, pois, $\forall a \in \mathbb{R}$ se tem:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

d) Existência do elemento simétrico

Para qualquer número real a existe outro número real $-a$ chamado simétrico de a, tal que:

$$a + (-a) = 0.$$

Assim a soma de um número real e o seu simétrico é igual a zero (0).

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists^{1} a' \in \mathbb{R} : a + a' = a' + a = 0$, onde $a' = -a$ - o oposto ou simétrico.

Definição 3.1.2

(Multiplicação nos Números Reais)

A multiplicação nos Números Reais é uma operação que associa a cada par de números reais chamados factores, um único número real c, chamado produto de a e b. Está definido por:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(a,b) \to c = a.b \end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLIÇÃO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

a) Se a e b são números reais, então o produto a·b é um número real. Por satisfazer esta propriedade diz-se que o conjunto dos números reais é fechado no que respeita à multiplicação. Pois, $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a.b \in \mathbb{R}\ a.0 = 0.a = 0$

b) Propriedade comutativa

Se a e b são números reais, então a.b = b.a, por conseguinte diz-se que a multiplicação de números reais goza da **Propriedade comutativa**.

c) Propriedade associativa

Na adição dos números reais, a forma de agrupar os factores não altera o produto. Se a e b são números reais, então a.b.c = (a.b).c = a.(b.c), por conseguinte diz-se que a adição de números reais, goza da **Propriedade associativa**.

d) Existência de um elemento identidade ou neutro No conjunto dos números reais, o número real **um** (1) é o elemento identidade ou elemento neutro da multiplicação porque o produto de qualquer número por 1è igual ao próprio número. Logo, se a é um número real, então:

$$a.1 = 1.a = a$$

e) Existência de elemento simétrico ou inverso

Para qualquer número real não nulo a, existe um outro número real $\frac{1}{a} = a^{-1}$ chamado inverso de a tal que:

$$a.\frac{1}{a} = 1 \quad ou \quad a.a^{-1} = 1$$

f) Propriedade distributiva em relação à adição

Multiplicar um número real por uma soma indicada de números é o mesmo que multiplicar o dito número real por cada uma das parcelas e depois somar os produtos obtidos. Logo, se a, b e c são números reais, então:

(a + b)·c = a·c + b·c

a·c + b·c = (a +b)·c

g) Elemento absorvente

Qualquer número multiplicado por zero é igual a zero. Se a é um número real, então:

$$a.0 = 0.a = 0$$

Definição 3.1.3

(Subtracção nos Números Reais)

É a operação inversa da adição. Na adição dão-se as parcelas e calcula-se a soma

$$a+b=c$$

Na subtracção dá-se a soma, chamada agora de aditivo e uma das parcelas chamada subtractivo e trata-se de calcular a outra parcela de diferença

$$c-a=b$$

A diferença $b=c-a$ e calcula-se somando ao aditivo o simétrico do subtractivo

$$b=c-a=c+(-a)$$

Nota:

Existem outros caminhos para introduzir a operação de subtracção sobre os números reais. Uma das ideias baseia-se nas seguintes propriedades de identidades numéricas:

Sejam $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

(i) Se $a=b$ então $b=a$

(ii) Se $a=b$ e $b=c$ então $a=c$

(iii) Se $a=b$ então $a+c=b+c$

(iv) Se $a=b$ e $c \neq 0$ então $ac=bc$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

(v) Se $a=b$ e $c=d$ então $a+c=b+d$, $ac=bd$

(vi) Se $a=b$ e $n \in \mathbb{N} \backslash^{\{0\}}$ então $a^n=b^n$

Logo, tendo $s = n + m, \quad n, m, s \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$s + (-m) = n + m + (-m) \text{ por (iii), isto é,}$$

$$s - m = n + \cancel{m} - \cancel{m} \text{ ou } s - m = n$$

PROPRIEDADES DA SUBTRAÇÃO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

a) Se a e b são números reais, então a sua diferença a - b é um número real. Por satisfazer esta propriedade diz-se que o conjunto dos números reais é fechado no que respeita à subtracção.

b) A subtracção de números reais, não goza da **Propriedade comutativa**.

Se observarmos 3 – √2 e √2 – 3 na recta real conclui-se que as duas expressões representam valores diferentes.

Logo $a - b \neq b - a$

c) A subtracção de números reais, também não goza da **Propriedade associativa.**

Observando o seguinte:

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$
$$3\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$$

como $-\sqrt{2} \neq 5\sqrt{2}$, então

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} \neq 3\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 3\sqrt{2})$$

Logo, $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

d) O número real zero (0) é o elemento identidade ou neutro à directa da subtracção. Observemos que a diferencia entre qualquer número e zero (0) é igual ao próprio número:

$\sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$;

$\pi - 0 = \pi$;

$\left(3\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) - 0 = \left(3\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)$

Mas zero não é elemento identidade ou neutro à esquerda:

0-2=-2 $\neq$ 2;
0-$\sqrt{6}$= -$\sqrt{6} \neq \sqrt{6}$

Logo, $0 - a = -a \neq a$

Definição 3.1.4

(Divisão nos Números Reais)

A divisão é a operação inversa da multiplicação. Na multiplicação dão-se os factores e calcula-se o produto

$$a.b = c$$

E na divisão dá-se o produto chamado agora de dividendo e um dos factores chamados agora de divisor e calcula-se o outro factor chamado agora de quociente:

$$\frac{c}{a} = c \div a = b \qquad (a \neq 0) \quad ou \qquad \frac{c}{b} = c \div b = a \qquad (b \neq 0)$$

Na divisão encontra-se a IDENTIDADE FUNDAMENTAL DA DIVISÃO

$$c \div b = a \Leftrightarrow c = a.b$$

PROPRIEDADES DA DIVISÃO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

a) Se a e b são números reais, com b não nulo $(b \neq 0)$, então o quociente $\frac{a}{b}$ $ou\ a \div b\ \ com\ (b \neq 0)$ é também um número real. Por satisfazer esta propriedade diz-se que o conjunto dos números reais é fechado no que respeita à divisão, com o divisor não nulo.

b) A divisão de números reais não é comutativa:

$$a \div b \neq b \div a$$

c) A divisão de números reais não é associativa.

Observando o seguinte:

$(16 \div 4) \div 2 = 8 \div 2 = 4$
$16 \div (4 \div 2) = 16 \div 2 = 8$

Conclui-se que:

$(16 \div 4) \div 2 \neq 16 \div (4 \div 2)$.

Logo, $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$.

d) O número real um (1) é elemento identidade ou neutro à direita na divisão. O quociente de qualquer número real e 1 é igual ao próprio número:

$$a = \frac{a}{1} = a \div 1$$

e) Numa divisão o divisor deve sempre ser diferente de zero.

Definição 3.1.5

(Potenciação nos Números Reais)

Uma adição de parcelas iguais convém ser representada em forma de produto:

$$a + a + a + a = 4.a \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Da mesma forma, uma multiplicação de factores iguais convém ser representada de forma exponencial:

$$b.b.b.b = b^4 \qquad \forall b \in \mathbb{R}$$

O pequeno número colocado na parte superior direita do factor que se repete é denominado expoente. O expoente indica o número de vezes que o factor se repete. O factor que se repete recebe o nome de base. O símbolo completo de base e expoente (b^4) recebe o nome de potência:

$$b^n = \underbrace{b.b.b.b.b....}_{n\ vezes}$$

Obs:

A potência de um número real não nulo e de expoente 0 é 1:

$$a^0 = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A potência de base de um número real e expoente 1 é igual ao próprio número:

$$b^1 = b \qquad \forall b \in \mathbb{R}$$

Definição 3.1.6

(Radiciação nos Números Reais)

A radiciação é operação inversa da potenciação. Na potenciação dá-se a base e o expoente, calcula-se a potência:

$$b^n = ?$$

Na radiciação dá-se uma expressão, $a^n = b$, em que procuramos saber qual é o valor de a para que $a^n = b$. Designamo-lo por $\sqrt[n]{b}$, isto é,

$$a = \sqrt[n]{b}\text{, pois, } a^n = \underbrace{\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{b}...\sqrt[n]{b}}_{n\ vezes} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b^1 = b.$$

Com base no acima exposto, um finalista do Ensino Secundário deve, sem dificuldades, resolver os exercícios seguintes:

1 –Calcular:

(i) $2\frac{1}{7} + \frac{3}{7}$

(ii) $\left(-2\frac{1}{2}\right)\div\left(-3\frac{4}{5}\right)$

(iii) $\dfrac{(1{,}09-0{,}29).1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9-16\frac{13}{20}\right).\frac{8}{9}}$

2- Verificar a igualdade:

(i) $3^3+4^3+5^3=6^3$

(ii) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right).\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt[3]{2^2\sqrt{2}}\div\sqrt[3]{2^3.\sqrt[3]{2}}=1$

3-O número a é maior do que c em 50%. Em que percentagem o número 6 é menor do que a?

4-Provar que:

(i) $\dfrac{5^3}{\left(3^4-3^3\right)^2}=\dfrac{1}{4}$

(ii) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[6]{27^2}=5$

5-Simplificar:

(i) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)\frac{3}{2}.}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}.\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2 8}}\right)}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{8}}\right)6}$

(ii) $\sqrt[4]{6}\times\left(5+2\sqrt{6}\right).\sqrt{3\sqrt{2\times}}-2\sqrt{3\times}$

IV-SUGESTÕES METODOLÓGICAS

4.1-TENDÊNCIAS PEDAGÓGICAS

A Matemática como actividade possui uma característica fundamental: a Matematização.

Matematizar é organizar e estruturar a informação que aparece num problema, identificar os aspectos matemáticos relevantes, descobrir regularidades, relações e estruturas.

Segundo Treffer existem duas formas de Matematização: a matematização horizontal e a matematização vertical.

A matematização horizontal é aquela que nos leva do mundo real ao mundo dos símbolos e nos possibilita tratar matematicamente um conjunto de problemas.

A matematização vertical consiste no tratamento especificamente matemático das situações.

Ao identificar o contexto em que se encontra o conteúdo que, nós como professores, iremos leccionar então cabe-nos a tarefa de escolher o método pedagógico que mais se adapta ao aluno a fim de atingir os objectivos pretendidos.

4.1.1- Construtivismo

Para o estruturalismo, a matemática é uma ciência lógico dedutiva e por ter esse carácter deve-se seguir essa metodologia no processo ensino-aprendizagem. O estilo *estruturalista* baseia as suas raízes históricas no ensino da geometria e na concepção da matemática como logro cognitivo caracterizado por ser um sistema dedutivo fechado e fortemente organizado.

Segundo este modelo deve-se ensinar aos alunos, a Matemática como um sistema bem estruturado, sendo essa estrutura do referido sistema o guia do processo da aprendizagem. Esse foi e continua a ser o princípio fundamental da reforma conhecida com o nome de Matemática Moderna e cujas consequências chegam até aos nossos dias. O estilo estruturalista precisa da componente horizontal porque baseia-se fundamentalmente na componente vertical.

4.1.2- Mecanicismo

O estilo *mecanicista* caracteriza-se pela consideração da Matemática como um conjunto de regras.

Ensinam-se as regras aos alunos e eles devem aplicá-las aos problemas que são semelhantes aos exemplos previamente dados.

Raramente se parte de problemas reais ou que fazem parte do ambiente do aluno, e ainda se dá pouca atenção às aplicações destas como origem dos conceitos e procedimentos, e dá-se muita importância à memorização e automatização de algoritmos de uso restringido, ainda que estes ajudem nas operações aritméticas e algébricas.

4.1.3- Empirismo

Os alunos adquirem experiências e conteúdos tomando como ponto de partida a realidade do aluno, o concreto. O ensino-aprendizagem é basicamente utilitário, mas necessita de aprofundamento e de sistematização da aprendizagem. O empirismo está enraizado profundamente na educação utilitária inglesa.

Segundo este modelo os alunos aprendem mas essa aprendizagem é somente vantajosa quando se trata de conhecimentos que se aplicam com a realidade como a aritmética, a geometria, etc.

4.1.4- Realista

Este estilo parte da realidade mas utiliza sempre matematização horizontal, pois ao contrário dos empiristas, aprofunda e sistematiza-se na aprendizagem, dando atenção no desenvolvimento dos modelos, esquemas, símbolos, etc.

O princípio didáctico é a descoberta ou a invenção da matemática pelo aluno, logo, as descobertas dos alunos são fundamentais. É basicamente um ensino orientado para os processos.

A nossa sugestão é que o professor não adopte nenhuma dessas tendências como única, ou defende-la como melhor, mas sim, segui-los em função dos objectivos propostos e da realidade do aluno.

4.2-ANÁLISE DOS PROGRAMAS DO ENSINO BÁSICO E DO 1º CICLO DE MATEMÁTICA DE CABO VERDE

1- Pré - requisitos

Depois da análise do programa do Ensino Básico e do seu respectivo currículo verifica-se o seguinte:

(i) Ao terminar esse nível de formação os alunos têm, na sua bagagem, o conhecimento sobre os números naturais ($\mathbb{N}$), inteiros não negativos ($\mathbb{N}_0$), decimais, fraccionários não negativos ($\mathbb{Q}_0^+$) e as suas respectivas relações de ordem.

(ii) Os finalistas do Ensino Básico sabem:

a) Reduzir as fracções ao mesmo denominador.

b)Decompor o número em factores primos.

c)Identificar a IDENTIDADE FUNDAMENTAL DA DIVISÃO:

$$D = q \times d + r \text{, onde } 0 \le r < q$$

Considerando o ensino-aprendizagem da Matemática no ensino secundário como um processo contínuo, a estrutura dos conteúdos essenciais devia seguir ao princípio lógico, conexividade. Identificando entre as outras, a ideia (linha) dos Números, podemos prosseguir e analisar o seu desenvolvimento no Ensino Secundário.

A linha dos "números" é uma das principais e pode ser considerada em dois aspectos: na "horizontal" (durante os níveis de escolaridade) e na "vertical" (de um nível para o outro). No Ensino Secundário o conceito de um "número real" considera-se partindo do "perfil de saída" do Básico.

Com os pré-requisitos acima referidos no 1º ciclo do Ensino Secundário o conteúdo temático "Números" está assim distribuído:

Ano	***Unidade***	***Conteúdos***	***Temas***
7º Ano	Números	O número	• Jogos com números • Representações dos números decimais e fraccionários • Prática do uso da calculadora. • Noção de Erro, Arredondamento e Truncatura • Estimativas
	Números relativos	Números relativos I	• Números Negativos • Representação dos números negativos no eixo • Módulo ou valor absoluto de números relativos • Números Simétricos $\mathbb{N}_0$ • Ordem em $\mathbb{Q}$ • Adição Algébrica
	Números relativos	Números relativos II	• Multiplicação em $\mathbb{Q}$ • Potencias de expoente natural e base racional • Divisão em $\mathbb{Q}$ • Expressões com variável concretizáveis em $\mathbb{Q}$

Figura 3

Destacamos aqui, um dos aspectos Didácticos e Metodológicos fundamentais: "Números Negativos"

Ao introduzir os Números Negativos, devemos sempre justificar o aparecimento dos mesmos, como uma necessidade de *tornar possível a subtracção em todos os casos.* Se $a < b$, então $a - b$ é um símbolo que precisa de significado no campo dos números inteiros; pois em contrapartida, existe o número $b - a = c$ e se põe:

$$a - b = c,$$

e se chama *número negativo.* A isto se junta a representação de todos os números inteiros, mediante a escala formada por pontos equidistantes do ponto zero, a um e outro lado na recta indefinida que se chama **eixo de abcissas** (ver Figura 1).

Esta interpretação geométrica é hoje familiar a todas as pessoas medianamente cultas; devendo sem dúvida a sua divulgação à conhecidíssima escala termométrica.

Um exemplo intuitivo muito usado dos números negativos é o dos saldos das contas comerciais, em que os cálculos se fazem sobre o Débito e o Crédito mas podemos utilizar outros jogos também desde que se aproximem o máximo possível à realidade do aluno; como por exemplo, o elevador, o termómetro, os degraus de uma escada, etc.

Apesar de todos esses exemplos e muitos mais que se poderiam pôr para clarificar o conceito de número negativo, deve-se reconhecer a grande dificuldade da sua introdução na escola. O aluno está acostumado a relacionar os números com as quantidades "reais", primeiro, e mais tarde nas letras com que opera, representações de casos concretos, e nas operações com números ou letras as correspondentes operações com os casos, Ao conhecer os números negativos ele encontra-se agora perante algo de natureza muito diferente. Pois com os números negativos ele não terá mais a imagem intuitiva que tinha formado do número e, quando operar com eles, as operações perderão aquele significado claro e intuitivo que tinha antes.

Apresenta-se, pois, aqui pela primeira vez, a ***passagem da matemática prática à formal,*** para a cuja completa compreensão é preciso alto grau da capacidade de abstracção.

E no que se refere à introdução das operações dos números negativos resulta, desde cedo, evidente que ***a adição e a subtracção se fundem em uma só operação***: a adição de um número positivo é simplesmente a subtracção do número negativo oposto de igual valor.

4.2.1-Propostas de Novos Conteúdos para o 1º Ciclos

Analisando os programas actuais de Matemática do ensino secundário dedicamo-nos ao tema dos Números, ao seu desenvolvimento em cada ciclo e às ligações temáticas entre os ciclos. Fazendo a consideração e análise crítica, apresentamos, nesse trabalho as nossas sugestões, propostas no sentido de melhorar o ensino do assunto escolhido – importante em toda a Matemática, utilizando os princípios de integração:

I – Tendo em conta que na “bagagem” dos conhecimentos dos alunos do ensino básico têm-se os critérios de divisibilidade por 2, 5, 10, 100 e 1000, e a ideia sobre o sistema de numeração decimal, podemos, sem grandes dificuldades, no 1º ciclo do ensino secundário, aprofundar essas questões de seguinte modo:

(i) Ao introduzir o Sistema decimal de numeração, utilizar a representação de um número natural n no sistema decimal.

$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_1.10 + a_0,$$

com $a_0, a_1, ..., a_{k-1} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $a_k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ sob a forma:

$$n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_1 a_0}\,; \qquad (4.1.)$$

Sabendo (pela definição), $n \in \mathbb{Z}$ é divisível por $m \in \mathbb{Z} \backslash^{\{0\}}$ quando

$$\exists r \in \mathbb{Z} : n = m.r\,;\ (r = 0)$$

(ii) Considerar os critérios de divisibilidades por: 4, 8, 9 e 11;

Considerando um número $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_1 a_0}$ é fácil ver que:

1) n é divisível por 2 quando a_0 for divisível por 2
2) n é divisível por 4 quando $\overline{a_1 a_0}$ for divisível por 4
3) n é divisível por 8 quando $\overline{a_2 a_1 a_0}$ for divisível por 8
4) n é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 3.
5) n é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos for divisível por 9.
6) n é divisível por 5 quando a_0 for divisível por 5
7) n é divisível por 25 quando $\overline{a_1 a_0}$ for divisível por 25.

Por exemplo, mostremos que se $\overline{a_1 a_0}$, isto é, $\exists l \in \mathbb{Z}: 10a_1 + a_0 = 4l,$ então:

$$
\begin{aligned}
n &= 10^k a_k + \ldots + 10^2 a_2 + 10a + a_0 \\
&= 10^k a_k + \ldots + 10^2 a_2 + 4l \\
&= 2^k.5^k a_k + \ldots + 2^2.5^2 a_2 + 2^2 l \\
&= \underbrace{2^2\left(2^{k-2}.5^k a_k + \ldots + 5^2 a_2\right)}_{\vdots 4}
\end{aligned}
$$

DIVISIBILIDADE EM $\mathbb{Z}$

Sejam $n, d, m, p, q \in \mathbb{Z}$

- Se n é divisível por d, então (n, m) é divisível por d.
- Se n é divisível por d e m é divisível por d, então $(n \pm m)$ é divisível por d.
- Se m é divisível por p e n é divisível por q, então $(m.n)$ é divisível por $(p.q)$.
- Se m é divisível por n e n é divisível por p, então m é divisível por p.

Por exemplo: m é divisível por $n \overbrace{\Leftrightarrow}^{def} \exists t \in \mathbb{Z} : m = n.t$

n é divisível por $p \overbrace{\Leftrightarrow}^{def} \exists s \in \mathbb{Z} : n = p.s$

Logo, $m = n.t = p.s.t = p.(s.t)$, isto é, m é divisível por p .

Com base nisso resolver os problemas do tipo:

a)“Encontrar um número natural da forma $\overline{123x43y}$ que divide por 3”;

<u>Resolução</u>

Utilizando a representação (4.1.) podemos descrever o número $123x43y$ sobe a forma:

$\overline{123x43y} = 1\times10^6 + 2\times10^5 + 3\times10^4 + x\times10^3 + 4\times10^2 + 3\times10 + y$

A soma dos algarismos desse número é igual $1+2+3+x+4+3+y = 13+x+y$. O valor mínimo dessa soma que se divide por 3 é 15, isto é, quando $x + y = 2$.

Dentre todos os números da forma dada, tendo em conta a condição $x + y = 2$, têm-se:

- 1230432
- 1232430 dos quais o mínimo é 1230432.
- 1231431

Além disso, a soma $x+y$, para os números da forma dada que se dividem por 3, pode tomar valores 5, 8, 11, 14, 17.

Logo:

- Se $x+y=5$, o número mínimo, nas condições do problema é 1230435.
- Se $x+y=8$, o número mínimo, nas condições do problema é 1230438.
- Se $x+y=11$, o número mínimo, nas condições do problema é 12304311.
- Se $x+y=14$, o número mínimo, nas condições do problema é 12304314.
- Se $x+y=17$, o número mínimo, nas condições do problema é 12304317.

De qualquer modo o menor dos números fica 1230432.

b)"Encontrar todos os números da forma $\overline{34x5y}$ que se dividem por 36";

Resolução

$\overline{34x5y}=3\times10^4+4\times10^3+x\times10^2+5\times10+y$

Sendo que $36=4\times9$, os números dados devem dividir-se por 4 e por 9.

Tendo em conta os critérios de divisibilidade por 4 e por 9, temos:

O número $\overline{5y}$ deve dividir por 4, logo y é igual a 2 ou 6.

O número $3+4+x+5+y=12+x+y$ deve dividir por 9, mas se $y=2\Rightarrow x=4$,

$y=6\Rightarrow x=0 \quad ou \quad x=9$.

Portanto, os números procurados são: 34452, 34056, 34959.

c)"Encontrar o algarismo X maximal tal que $12+\overline{2x3}$ se divide por 3";

Resolução

Sendo que $12\,\vdots\,3$ e a soma $\left(12+\overline{2x3}\right)\vdots\,3$, obtemos que $\overline{2x3}$ deve dividir-se por 3.

Logo, $2+x+3=5+x$ divide-se por 3 quando $x=7$, nas condições do problema.

(iii) A esse nível do ensino podemos começar a "trabalhar" com o termo "Demonstração", esclarecendo o significado da palavra.

Definição 4.2.1

Demonstração é o processo de raciocínio lógico que leva dos factos conhecidos (argumentos) às conclusões verdadeiras (tese) baseando-se nos conhecimentos anteriormente adquiridos.

Uma demonstração tem como meta a confirmação da veracidade da tese. Esse processo é fundamental em toda a Matemática. Saber realizar uma demonstração significa poder ordenar as suas ideias, aplicar os conhecimentos, conjugando-os uma determinada situação - desafio.

A tarefa do professor é ensinar os alunos a construir tais conexões que lhes permitam chegar a conclusões correctas.

O professor de Matemática deve utilizar os conteúdos dos programas, sempre que possível para esse fim desde o 1º ciclo do Ensino Secundário, pois os alunos já têm uma base mínima para isso.

Neste trabalho propomos alguns exemplos possíveis, a partir dos quais o professor pode começar a ensinar aos alunos essa nova actividade.

É importante mostrar aos alunos diferentes tipos de demonstrações. Na primeira etapa seria melhor começar por considerar as demonstrações "directas", partindo dos argumentos para chegar à tese, por exemplo:

Demonstrar que:

- O número $\overline{ab}-\overline{ba}$ divide-se por 9;

<u>Demonstração</u>

Com efeito, sendo que

$$\overline{ab}-\overline{ba}=a.10+b-b.10-a=10.(a+b)-(a+b)=9.(a+b)$$

Logo $(a+b)$ é divisível por 9.

Chegamos assim à afirmação pretendida..

- O número $\overline{ab}+\overline{ba}$ divide-se por 11

Demonstração

Como,

$\overline{ab}+\overline{ba}=a.10+b+b.10+a=11a+11b=11(a+b)$

O que significa que $\overline{ab}+\overline{ba}$ divide-se por 11

II - Sabendo que na 6ª classe do ensino básico foi introduzido o conceito do número racional e nos anos 4 - 5 –o conceito do decimal, é possível no 7ºano do Ensino Secundário considerar a regra dos "noves".

Essa regra tem como objectivo transformar qualquer dízima infinita periódica em fracção. Diz o seguinte:

"No numerador escreve-se o número que representa o período; no denominador escreve-se tantos "noves" quantos algarismos se encontram no período e tantos "zeros" quantos algarismos se encontram ante o período."

Exemplo:

$$0,0(3)=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$$

No ano lectivo 2006/07 foi realizado um estudo metodológico desse assunto.

Esta regra foi introduzida, na Escola Secundária de Palmarejo, em cinco turmas de 7º Ano (I, J, K, L e M) de alunos com idades compreendidas entre 14 e 17 anos que moram nos arredores de Palmarejo e na zona da Praia Rural (Cidade Velha, Porto Mosquito, S. Martinho, etc.)

Este sub - tema foi introduzido com o intuito de verificar se o facto de aprofundarmos um pouco o estudo de dízimas se iria repercutir no desempenho dos alunos.

Já que o conteúdo não podia ser avaliado por não fazer parte do programa, foi elaborado um teste, mas não se considerou a pontuação do exercício para a do resultado final do teste (anexo).

Como eles já tinham como pré-requisito a transformação de um número decimal finito em fracção, foi introduzida a regra como uma continuidade, isto é, além do número decimal finito, um número decimal infinito periódico também pode ser transformado em fracção.

Como podemos constatar (**Figura 4**) houve uma grande percentagem (16%) de alunos que ultrapassaram o número de faltas permitidas. Alguns destes alunos moram longe, outros por não terem acompanhamento familiar na escola e alguns por gravidez precoce. Nesse universo de 188 alunos 39% aprovaram na disciplina e 41% reprovaram.

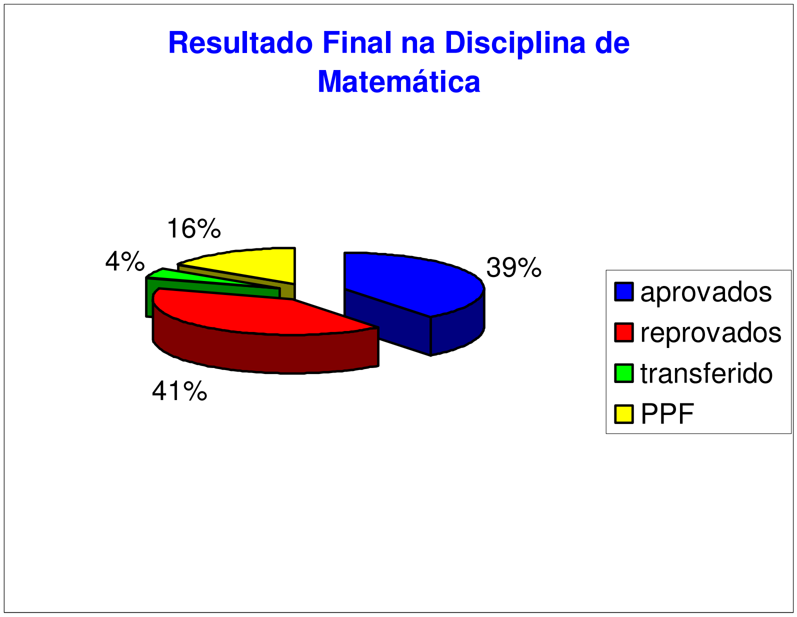


Figura 4

Depois de introduzir a regra foi realizado um teste, onde estava incluída a sua utilização.

Cerca de 65% dos alunos utilizaram a regra para transformar uma dízima infinita periódica em fracção. Somente 26% dos alunos não a utilizaram (**Figura 5**).

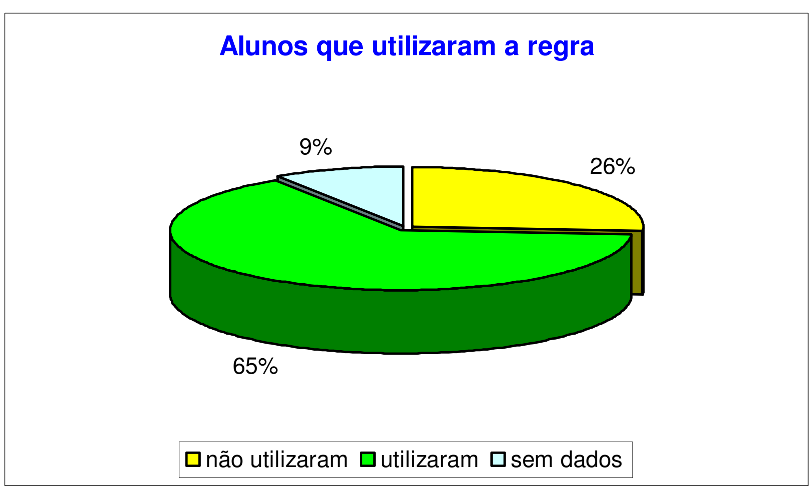


Figura 5

Dos alunos que utilizaram a regra dos nove, 60% simplificaram a fracção encontrada. Relativamente aos 40% que não simplificaram, podemos concluir que não possuíam os pré-requisitos para frequentarem o ensino secundário (**Figura 6**).

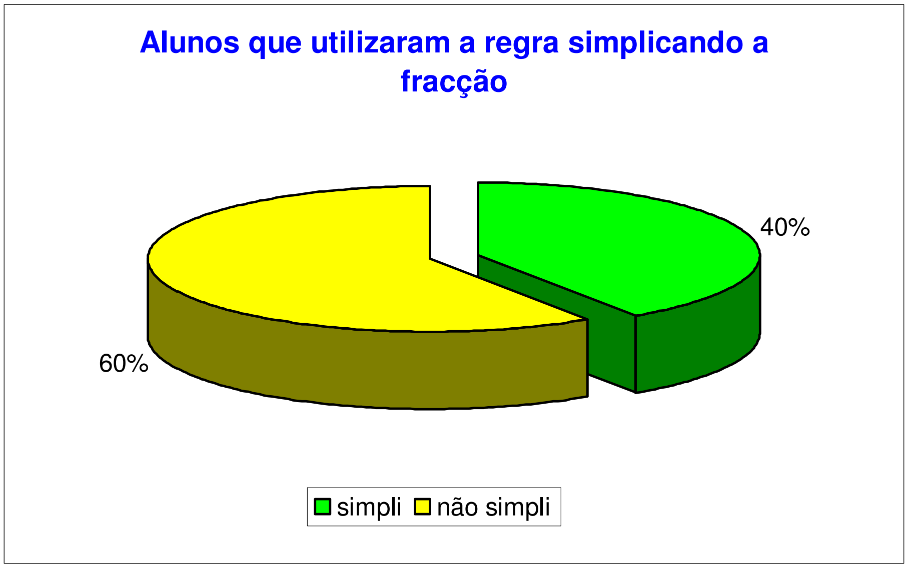


Figura 6

Relacionando o resultado dos testes com a utilização da regra podemos concluir que no universo dos alunos que a utilizaram houve maior desempenho (**Figura 7**).

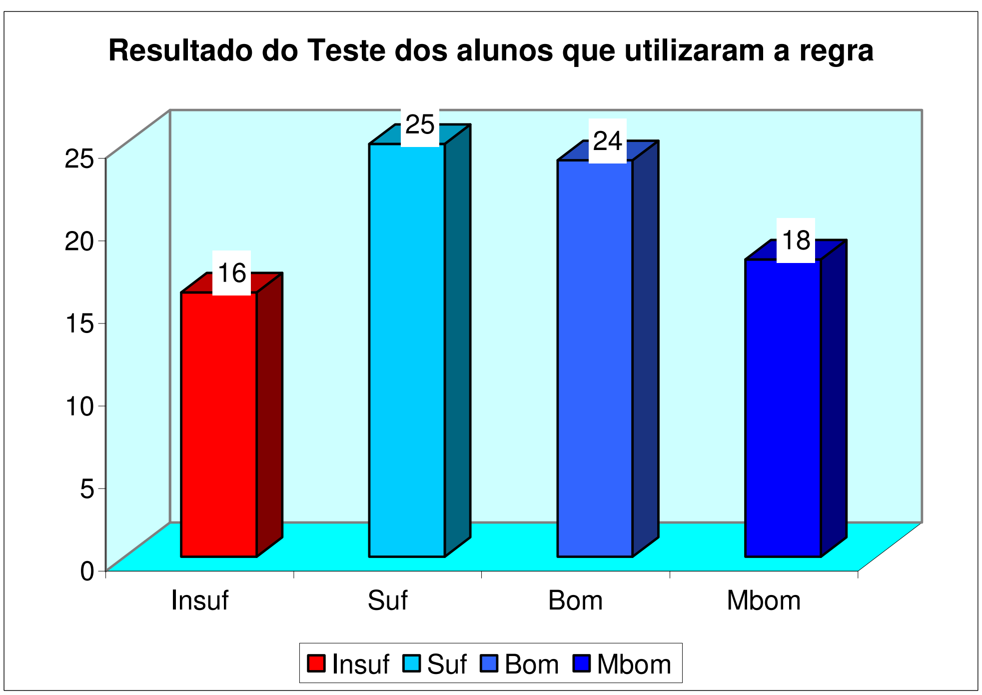


Figura 7

De realçar que não houve nenhum aluno com classificação de M. Bom daqueles que não utilizaram a referida regra e, não obstante constatamos um grande número de classificações Insuficiente (**Figura 8).**

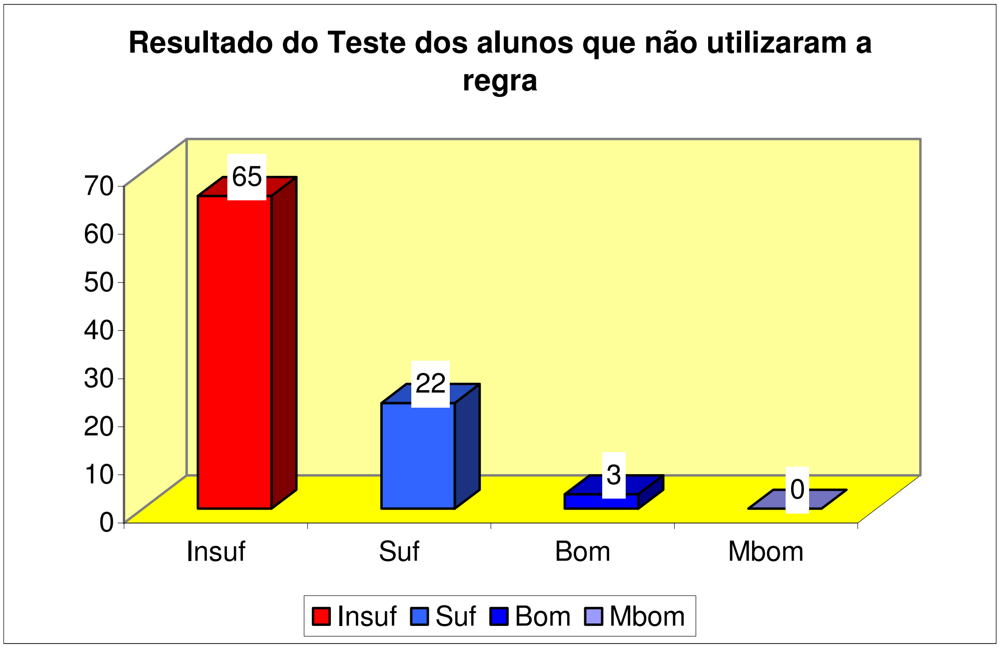


Figura 8

Dos que não utilizaram a regra, somente 20% conseguiram passar na disciplina. Depois da análise feita podemos verificar que o facto de apresentar um novo conteúdo não influencia de modo algum no desempenho escolar dos alunos (**Figura 9**).

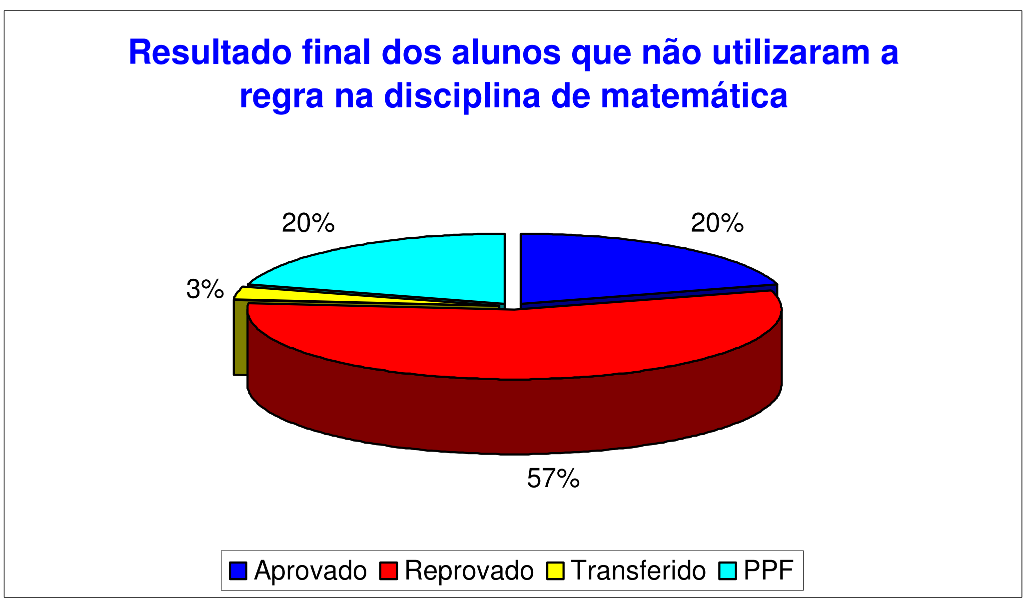


Figura 9

A introdução da regra foi um sucesso. Estes alunos, além de aprofundarem, o estudo do conteúdo proposto, ganharam uma «mais valia» em relação aos que não estudaram a dita regra.

A experiência positiva leva-nos a sugerir uma reflexão, ao nível nacional, entre os professores de Matemática, sobre o conteúdo proposto com o objectivo da sua inclusão no estudo dos Números Reais.

III- Uma das componentes do Perfil de saída de EB consiste em saber operar com os números fraccionários, o que pressupõe não só realizar as operações aritméticas elementares, mas, também, com base nos conceitos de "número primo", "M.D.C", "M.M.C." saber comparar os números, percebendo que a mesma fracção pode ser expressa de diferentes maneiras.

a)O aluno deve saber responder as questões do tipo:

- "Dentre os números $\frac{15}{30}, \frac{45}{90}, \frac{10}{30}, \frac{1}{2}, \frac{18}{72}, \frac{8}{32}$ indicar as que são iguais";
- "Encontrar o número mínimo que é divisível por 3, 4, 6";
- "Sabendo que a na divisão por 3 dá o resto 1 e b na divisão por 3 dá resto 2, qual será o resto da divisão de $2a+b, 4b$ por 3?"

b)O aluno deve ser capaz de resolver a situação seguinte:

Calcular sem calculadora:

$$\frac{-(1{,}11+0{,}19)+1{,}3\times 2}{2{,}06+0{,}54}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div 2$$

Resolução:

$$\frac{-(1,11+0,19)+1,3\times 2}{2,06+0,54}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div 2$$
$$=\frac{-1,30+2,6}{2,6}-\left(\frac{5}{6}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1,3}{2,6}-\frac{5}{12}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{5}{12}$$
$$=\frac{1}{12}$$

IV – Como os alunos já conhecem a representação dos números relativos no eixo das abcissas pode-se demonstrar nele a regra da eliminação de parêntesis precedente do sinal "menos"

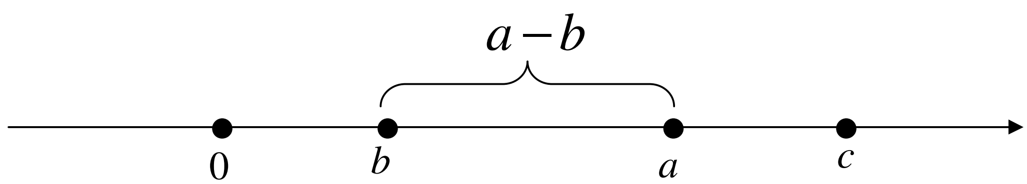


Figura 10

Seja $a > b$ e $c > a$ então a - b é um número positivo e menor que c; portanto, deve existir o número positivo c- (a - b). Representemos os números sobre o eixo das abcissas, e observando que o segmento entre b e a, tem o comprimento a-b; a simples observação da figura mostra que, se retirarmos do segmento c o a - b se obtêm o mesmo se retirarmos todo o segmento a e logo somamos a parte b;
é dizer:

$$c-(a-b)=c-a+b$$

Com essa base, competências de base ao nível do 1º ciclo do Ensino Secundário, começa-se a "construção do edifício" do conhecimento sobre os números reais.

4.3-ANÁLISE DOS PROGRAMAS DO 2º CICLO DE MATEMÁTICA DE CABO VERDE

No 2º ciclo os conteúdos temáticos do estudo dos números encontram-se assim distribuídos:

Ano	***Unidade***	***Conteúdos***	***Temas***
9º	Números Reais	Operações com números reais	• Conjunto dos números reais: dízimas, irracionais, comparação de números reais, intervalos de números reais • Potências de base real e expoente inteiro (negativo)
10º	Números	Operações com números reais	• Operação com radicais quadráticos, cúbicos e potências de expoente fraccionário.

Figura 11

4.3.1-IDEIAS DOMINANTES SOBRE A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS $\mathbb{R}$

4.3.1.1-Construção Intuitiva do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

Intuitivamente, podemos construir o conjunto dos números reais a partir dos racionais da seguinte forma: uma *recta* formada por números racionais tem “***buraco”*** (por exemplo, existe um buraco onde deveria estar a raiz quadrada de 2). O conjunto dos números reais completa essa recta, tapando todos os buracos, de forma que se a recta real está dividida em duas semi-rectas, então existe um ponto separador das duas semi-rectas.

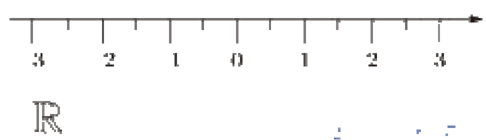


Figura 12

4.3.1.2- Construção rigorosa do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

Existem duas formas rigorosas de construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$: através dos cortes de Dedekind e através de sucessões de Cauchy.

No ensino secundário normalmente utiliza-se a Construção Intuitiva.

Compreende-se, desde cedo, que nem pela capacidade mental dos alunos, nem pelo interesse que neles se pode despertar, se deve introduzir o conceito e a construção de números reais com inúmeros algarismos pertencentes à parte decimal. O aluno deve contentar-se em calcular com um certo grau de aproximação; uma aproximação de 0,001. Já lhe deixará admirado e seguramente não lhe ocorrerá pretender o ilimitado; claro é, que haverá alguns alunos mais dotados que vão querer algo mais nesta questão, e então cabe ao professor dar satisfação a este desejo, sem prejudicar os interesses da maioria.

4.3.2-Propostas de Novos Conteúdos para o 2º Ciclo

I – No contexto dos números infinitos:

Decimal infinita periódica ≡ número racional e decimal infinita não periódica ≡ número irracional, são possíveis demonstrações ao nível mais elevado.

Nessa etapa, os alunos, já familiarizados com o conceito de "demonstração", são capazes de compreender o método mais antigo - "demonstração por redução ao absurdo" .

Este método consiste em contradizer uma tese e utilizar hipóteses verdadeiras para provar essa tese.

Sendo assim, o professor pode propor, por exemplo:

- Demonstrar a irracionalidade dos números:

  (i) $\sqrt{3}$;

<u>Demonstração</u>

Suponhamos que $\sqrt{3}$ é racional, isto é, pode ser representado sob a forma $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, onde $(p,q)=1$, $q\neq 0$.. Então $3q^2=p^2$.

Sendo que $3q^2$ se divide por 3, a parte direita da última igualdade deve dividir-se por 3, também, isto é, $p^2=3n$, com $n\in\mathbb{Z}^+$. Mas então p, também, se divide por 3, pois se assim não fosse, isto é, se p teria a forma de $3k+1$, ou $3k+2$, com $k\in\mathbb{Z}^+$, obteríamos:

$$p^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1,\ \text{que não é divisível por 3}$$

Ou

$$p^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1\quad \text{que não é divisível por 3}$$

.

Logo, $p=3m$, onde $m\in\mathbb{Z}^+$ e $3q^2=9m^2$ ou $q^2=3m^2$ donde $q=3l,\quad l\in\mathbb{Z}^+$, isto é, q é divisível por 3, o que verifica que $(p,q)=3$, contrariando à hipótese de que $(p,q)=1$.

Portanto, a suposição de que $\sqrt{3}$ é racional é incorrecta e $\sqrt{3}$ é um número irracional.

(ii) $\dfrac{\sqrt{3}}{m}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus^{\{0\}}$;

Analogamente a (i) se demonstra que $\dfrac{\sqrt{3}}{m}$ é irracional.

(iii) $tg\ 5º$;

Demonstração

Suponhamos que o número $tg\ 5º$ é racional, isto é, $tg\ 5º = \dfrac{p}{q}$, com $(p,q)=1, q \neq 0$. Então os números $tg\ 10º, tg\ 20º, tg\ 30º$ serão racionais, pois.

$$tg\ 10º = \frac{2tg\ 5º}{1-tg^2 5º} = \frac{2\times\frac{p}{q}}{1-\frac{p^2}{q^2}} = \frac{l}{m}, \quad l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N};$$

$$tg\ 20º = \frac{2tg\ 10º}{1-tg^2 10º} = \frac{2\times\frac{l}{m}}{1-\frac{l^2}{m^2}} = \frac{r}{s}, \quad r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N};$$

$$tg\ 30º = tg\,(10º + 20º) = \frac{tg\ 10º + tg\ 20º}{1 - tg\ 10º \times tg\ 20º} = \frac{\frac{l}{m}+\frac{r}{s}}{1-\frac{l\times r}{m\times s}} = \frac{d}{t}, \quad d \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}.$$

Mas, sabemos que $tg\ 30º = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ - irracional. Logo a suposição de que $tg\ 5º$ é racional é incorrecta.

II – Com base nas propriedades das igualdades/desigualdades numéricas (em $\mathbb{R}$) o aluno, ao nível do 2º ciclo é capaz de responder às seguintes questões:

(i) Demonstrar igualdades:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}\ ;\ 0,(3)+3\frac{1}{3}+0,4(2) = 4\frac{1}{45}.$$

(ii) Calcular:

$$\frac{-(1,11+0,19)+1,3\times 2}{2,06+0,54} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \div 2.$$

(iii) Comparar os números:

$0,(3) \quad e \quad \frac{1}{3}$; $-3,776 \quad e \quad -3,(776)$.

(iv) Verificar a desigualdade:

$\sqrt{7}+\sqrt{15}<7$; $2\times5^3>5\times2^3$.

(v) Colocar na ordem crescente os números:

- $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad \left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{15}}, \quad \left(\frac{9}{25}\right)^{-1}, \quad \frac{5}{3}$;
- $-2,(2); \quad -2\frac{1}{17}; \quad -1-\sqrt{2}; \quad -\frac{\sqrt{17}}{2}$;

III – Introduzir os conceitos de “parte inteira” e “ parte fraccionária” de um número real.

Definição 4.3.3.1

Chama-se “parte inteira” de um número real x ao número inteiro máximo que é superior a x e representa-se por $[x]$.

Logo, $[x]=x$.

Por exemplo:

$$[3,7]=3;$$
$$[-2,4]=-3;$$
$$[0,5]=0$$

Definição 4.3.3.2

À diferença $x-[x]$ chama-se “parte fraccionária” (ou função **mantissa**) e designa-se por $\{x\}$, isto é, $\{x\}=x-[x]$, por conseguinte $x-[x]=\{x\}\geq 0 \quad e \quad 0\leq\{x\}<1$.

Exemplos:

$\{1,1\}=1,1-1=0,1$

$\{-2,3\}=-2,3-(-3)=0,7$

$\left\{\frac{19}{5}\right\}=\left\{\frac{4}{5}\right\}$

Proposta de alguns exercícios:

(i) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=1$

Resolução:

Segundo a definição $[x]\le x<[x]+1$, logo $1\le\dfrac{x}{2}<2$.

Então teremos que $2\le x<4$.

Solução: $x\in[2,4[$

(ii) $[x+1,3]=-5,$ $\qquad$ $Sol: x\in[-6,3;-5,3[$

(iii) $\left[2x+\dfrac{1}{5}\right]=1,$ $\qquad$ $Sol: x\in\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{9}{10}\right[$

(iv) $[3x-5,2]=2\dfrac{3}{7},$ $\qquad$ $Sol: x\in\{\ \}$

(v) $\left[\dfrac{x+1}{3}\right]=\dfrac{x-1}{2}$

Resolução:

É fácil ver que $\dfrac{x-1}{2}$ é um numero inteiro, por isso x é um numero inteiro impar.

Logo, $\dfrac{x-1}{2}\le\dfrac{x+1}{3}<\dfrac{x-1}{2}+1$, donde vem que:

$$3x-3\le 2x+2<3x+3$$

ou

$$\begin{cases} x>-1 \\ x\le 5 \end{cases} \quad \text{Isto é}, -1<x\le -5$$

tendo em conta que x é inteiro par, obtemos $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=5$

Solução: $x\in\{1,3,5\}$

IV- Propor alguns exercícios que envolvam o calculo de MDC e de MMC:

(i) Determinar dois números naturais cuja soma seja igual a 168 e máximo divisor comum igual a 24.

Resolução:

Sejam os números procurados a e b. Segundo o enunciado do problema $a+b=168$ e $(a,b)=24$.

Tendo em conta a definição do máximo divisor comum de a e b podemos escrever que:

$a=24t$ e $b=24n$; onde $t,n\in \mathbb{N}\backslash^{\{0\}}$.

Logo, $24t+24n=168$ ou $t+n=7$

Sendo que t e n são naturais, obtemos:

$t=1$, $n=6$
$t=2$, $n=5$
$t=3$, $n=4$

E consequentemente:

$a=24,\ b=144$
$a=48,\ b=120$ Solução: 24 e144; 48 e120; 72 e 96.
$a=72,\ b=96$

(ii) Encontrar os números naturais x e y, sabendo que o seu produto è igual a 240 e o máximo divisor comum igual a 4.

Resolução:

Pela definição e pelo enunciado temos:

$x=4t$ e $y=4n$, onde $t,n\in \mathbb{N}\backslash^{\{0\}}$

Como $(t,n)=1$, então $xy=4t.4n=240$ ou $t.n=15$.

Sendo t e n primos entre si, os possíveis valores que satisfazem a igualdade são:

$t=1$, $n=15$
$t=3$, $n=5$
$t=5$, $n=3$
$t=15$, $n=1$

Portanto os números procurados são:

$$x = 4,\ y = 60$$
$$x = 12,\ y = 20$$
$$x = 20,\ y = 12$$
$$x = 60,\ y = 4$$

Solução: $(x, y) \in \{(4,60);(12,20);(20,12);(60,4)\}$

IV- Apresentar demonstrações simples para o quadrado de um binómio:

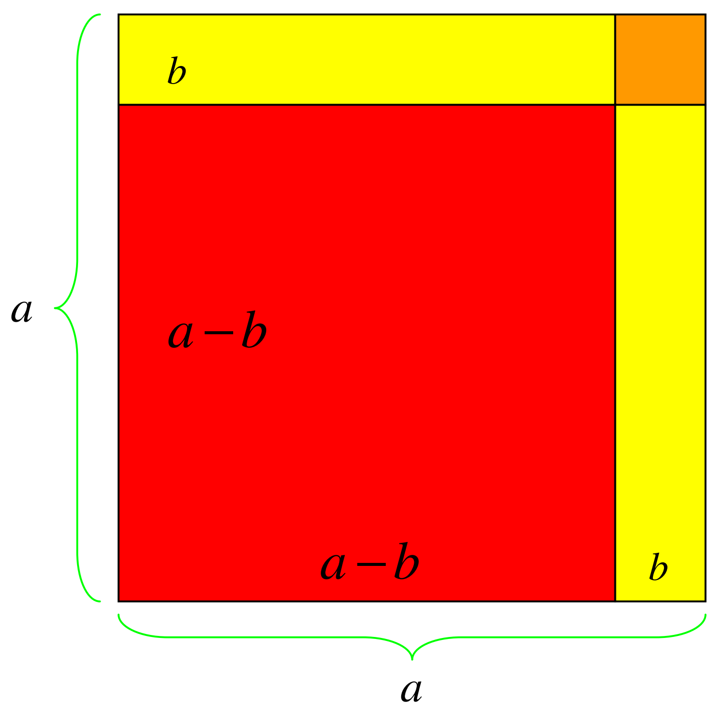


Figura 13

Seja *a* > *b*; no cujo caso também *a* –*b* é um número inteiro positivo. Vejamos o que ocorre com o produto *(a* –*b)(a* –*b*). Para isso tracemos dois rectângulo de lado *a e b* cujas áreas são o número *a.b)*. O quadrado procurado*(a* –*b)(a* –*b* é uma parte daquele de lado *a* .

Para obter aquele quadrado partindo deste (de lado *a)*, retiraremos o rectângulo superior que aparece pintado de amarelo e laranja e que é igual a *ab;* depois o rectângulo da direita aparece pintado de amarelo e laranja, *ab;* estes dois tem um em comum, o quadrado

$(-b).(-b)=b^2$, que, por conseguinte, aparece tirado duas vezes, de modo que deverá ser somado uma para obter o *(a –b)(a –b)*

Logo fica demonstrado a formula de que:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Obs: Com esta mesma figura podemos demonstrar que a multiplicação de dois números negativos dá um número positivo. Basta considerar que a =0, então o número b vai ser um número negativo: $(-b).(-b)=b^2$.

V-ABORDAGEM POR COMPETÊNCIAS E A PEDAGOGIA DE INTEGRAÇÃO

Por a escola ser o lugar onde se preparam indivíduos que irão viver numa determinada sociedade, é imprescindível que ela os prepare para serem capazes de utilizar os conhecimentos adquiridos, ao longo das suas vidas.

Perante essa necessidade, os responsáveis do Sistema Educativo procuram adaptar os programas escolares, de modo que satisfaçam essa demanda, através da Abordagem por Competências.

Para acompanharmos essa necessidade, nós os professores, temos responsabilidades e, consequentemente, temos de levar em conta as nossas competências:

Análise dos níveis de competência do professor

Nível Global	Áreas Principais	Sub - áreas
Competência global do professor	Base de conhecimento explícito	1 – Recursos Curriculares; 2 – Recursos Pedagógicos; 3 – Experiência Profissional;
	Planeamento e preparação	4 – Conhecimentos claros a respeito de alunos, contexto e recursos; 5 – Média adequada de actividades e recursos para alunos;
	Ensino interactivo	6 – Assistência inteligente e eficiente ao aprendizado do aluno, à organização e à pesquisa; 7 – Avaliação e monitoramento efectivo do aprendizado e progresso do aprendizado do aluno; 8 – Adequado relacionamento para influenciar alunos, seu comportamento, motivação e bem-estar; 9 – Avaliação e monitoramento efectivos do comportamento, motivação e bem-estar do aluno;
	Modelo profissional abrangente	10 – Cumprir a tarefa de construir um modelo profissional abrangente, através da colaboração efectiva e vários outros;
	Auto-desenvolvimento profissional	11 – Desenvolvimento de conhecimento básico específico da matéria, pedagogia e profissional; 12 – Melhoria da capacidade profissional, através de estudo, reflexão e mudança.

Fonte: Giorgi (2001) **Figura 14**

Quando pensamos em Abordagem por Competências temos, obrigatoriamente, que considerar os quatro pilares da Educação definidos pela UNESCO em 1996:

- Aprender a conhecer
- Aprender a fazer
- Aprender a conviver
- Aprender a ser

Esta abordagem tem como objectivo principal definir competências a longo prazo, isto é, definir as competências que cada aluno deve desenvolver no final do ano. Em função dessas competências, então definir o que o aluno deve adquirir, elucidá-lo para que servem esses saberes e por fim colocá-lo perante situações onde ele utiliza o que foi aprendido. O professor com esta abordagem, fornece ao aluno recursos e mostra-lhe como utilizá-los para actuar face aos problemas do quotidiano.

Nesses momentos utiliza-se a pedagogia da integração, cuja prática constrói aprendizagens por etapas.

A situação que permite pôr em prática os conhecimentos adquiridos é denominada de situação complexa.

Para avaliar deve-se utilizar todos os processos recomendados, mas sempre com uma grelha de correcção como suporte, com o intuito de verificar se o aluno adquiriu competências, e se não, diagnosticar as falhas existentes para poder ajudá-lo na superação das mesmas.

Para exemplificar a construção de competências na aula de Matemática propomos a seguinte actividade:

"Desde o ano de 1998 funciona com sucesso, na Praia, uma fábrica de produção de refrigerantes. No primeiro trimestre de 2007, a fábrica atingiu bons resultados na produção de Coca-Cola, Sprite, Fanta Laranja e Fanta Coktail. Consultando o relatório referente a esse período (em baixo), determina a quantidade de Sprite produzida, em média, por dia e calcule a percentagem de produção de Coca-Cola referente ao 1º trimestre, na fábrica".

RELATÓRIO DO 1º TRIMESTRE DE PRODUÇÃO DE REFRIGERANTES

1ºTrimestre de 2007	
Refrigerantes	Unidades (garrafas de 0,30 cl)
Coca-Cola	1 497 600
Sprite	1 123 200
Fanta Laranja	748 800
Fanta Coktail	374 400

As garrafas são distribuídas em caixas que contém 24 garrafas cada. Os funcionários trabalham em média 8 horas por dia durante 25 dias por mês.

Competências a atingirem:

- Determinar o nº de meses existentes num trimestre.
- Aplicar a regra dos três simples.
- Efectuar a divisão.
- Determinar correctamente uma soma.
- Calcular percentagens.

Obs: Essa actividade é destinada aos alunos do 8º ano (1º ciclo)

Com esta actividade pretende-se avaliar os seguintes conteúdos bem como os respectivos objectivos:

Conteúdos	***Objectivos***
Regra de Três Simples	• Aplicar a “regra de três simples” na resolução de problemas. • Reconhecer a “regra de três simples” como um processo de resolver situações de proporcionalidade directa.
Fracção	• Identificar os termos de uma fracção. • Traduzir um problema do quotidiano por meio de uma Modelação Matemática. • Estimar a ordem de grandeza de um resultado. • Utilizar a calculadora como auxiliar de cálculo na resolução de problemas.
Percentagem	• Calcular percentagens. • Reconhecer a importância e a aplicabilidade da percentagem em situações do dia-a-dia.

Proposta de correcção da actividade

Competências	***Possíveis respostas***	***Pontuação Parcial***	***Pontuação Total***
C_1	Um trimestre corresponde a três meses	1	1
C_2	Se os funcionários da produção trabalham 25 dias por mês, então em três meses realizaram as suas funções 75 dias (aplicação da “regra de três simples”).	2	2
C_3	Como em três meses produziram 1 123 200 garrafas de Sprite, então o número médio de garrafas produzido por dia é dado pela fracção seguinte: $\frac{1123200}{75} = 14976$.	1 2	3
C_4	Durante o primeiro trimestre a totalidade de garrafas produzidas é dada por: $1\,497\,600 + 1\,123\,200 + 748\,800 + 374\,400 = 3\,744\,000$ Logo, a percentagem de produção de Coca-Cola referente a esse trimestre é: $\frac{1\,497\,600}{3\,744\,000} \times 100 = 40\%$.	2 2	4

Para a superação das falhas, etapa muito importante da Abordagem por Competências, referida anteriormente, é recomendável que o professor agrupe os dados de modo que, a partir da observação dos mesmos, focalize os grupos e as competências que necessitam de ser remediadas.

VI – CONCLUSÃO

O presente trabalho é fruto de várias pesquisas bibliográficas e análise dos programas do Ensino Básico e Ensino Secundário de Matemática do 1º e 2º Ciclos.

Está incompleto, pois na sua realização constatamos que existem conteúdos a serem abordados.

Apesar de ter uma parte teórica, a predominância do seu conteúdo é a análise das metodologias e propostas de exercícios.

Acreditamos que o esforço feito vai contribuir para o sucesso do ensino-aprendizagem da Matemática em geral e no estudo dos Números em particular. Ao executar a Monografia, levou-se sempre em consideração os conhecimentos teóricos e práticos adquiridos durante a formação.

Pensamos que com este trabalho, atingimos o objectivo de oferecer ao professor de Matemática, mais um instrumento de apoio e consulta no contexto do conjunto $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIA

1. "http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real
2. AUBYN, António St., FIGUEIREDO Maria Carlos, LOURA Luís, RIBEIRO Luiza, VEGAS Francisco. Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa. Março de 2004.
3. beth.kraemer[arroba]terra.com.br
4. DELORS, J.. **Educação: um tesouro a descobrir**. São Paulo. Cortez, DF: MEC: UNESCO. 2001.
5. http://jasss.soc.surrey.ac.uk/9/4/4.html
6. KOSTRIKIN, A. **Introdução à Álgebra** (Espanhol).
7. KREIN, F.. **Matemática Elementar desde de um ponto de vista superior**. Vol. I Madrid.
8. KUROSH, A.. **Curso da Álgebra Superior** (Russo). Livraria Escolar Editora. Lisboa. 1982.
9. KUSHNER ,I.. **Problemas escolhidos da Matemática escolar** ,v,1. Astra–Kiev. 1995.
10. LIPSCHUTZ ,Seymour. **Teoria dos conjuntos**. Coleção. Schaum.
11. MONTEIRO, António J. , MATOS, Isabel Teixeira. **ÁLGEBRA – Um Primeiro Curso**. Escolar Editora. 1995.
12. MONTEIRO, L. H. J.. **Elementos de Álgebra**. Impa. Rio de Janeiro, 1969.
13. OLIVEIRA, A.J.Franco. **Teoria de conjuntos. Intuitiva e axiomática**.
14. PINEDO, C. J. Quintana. **Introdução à analise real**.
15. Programa de E. B. I.. M. E.. Cabo Verde. 1994.
16. Programa de Matemática tronco comum. 11º e 12º Anos. M. E.. Cabo Verde. 1996.
17. Programa de Matemática tronco comum. 7º e 8º Anos. M. E.. Cabo Verde. 1996.
18. Programa de Matemática tronco comum. 9º e 10º Anos. M. E.. Cabo Verde. 1996.
19. ROEGIERS, X.. **O que é a A.P.C.**
20. RUDIN ,W.. PRINCUPLES OF MATHEMATICAL ANALISYS. McgrawHill. New York, 1976.
21. SOBRAL , Manuela. **Álgebra**. Universidade Aberta.1996.
22. VAVILOV, V.V. , MELNIKOV, I.I.. **Problemas de Matemática. Algebra**. Moscovo. Ciência. 1987
23. www.matematica.br

ANEXOS

ESCOLA SECUNDÁRIA DE PALMAREJO
2º Teste Sumativo de Matemática - 1ºtrimestre
7º Ano

OBJECTIVOS

- Transformar uma fracção num número decimal
- Transformar um número decimal numa fracção
- Identificar uma dízima finita
- Identificar uma dízima infinita periódica
- Identificar uma dízima infinita não periódica
- Representar o valor aproximado de um número racional, por defeito e por excesso, com uma determinada margem de erro
- Distinguir arredondamento de truncatura

ESCOLA SECUNDÁRIA DE PALMAREJO
2º Teste Sumativo de Matemática - 1ºtrimestre
7º Ano-A

NOME____
Nº________TURMA_____

1-Transforma as seguintes fracções em números decimais, apresentando todos os cálculos e indica o tipo de dízimas associadas a cada uma delas

a) $\frac{9}{5}$

b) $\frac{13}{9}$

c) $\frac{11}{8}$

d) $\frac{8}{3}$

2-Transforma os seguintes números decimais em fracções (irredutíveis).

a)1,5=

b)2,38=

c)1,326=

d)0,0(81)=

Completa o seguinte quadro:

Valor Aproximado de 7/13		A menos de
Por defeito	Por excesso	
		Uma unidade
		Uma décima
		Uma centésima
		Uma milésima

4- Faça a truncatura dos seguintes números atendendo à quantidade de casas decimais (c. d.) assinaladas dentro do parêntese:

a)19,3846 (2 c. d.) $\cong$

b)637,594 (1 c. d.) $\cong$

c)54,349 (0 c. d.) $\cong$

d)6,2571 (3 c. d.) $\cong$

5- Faça o arredondamento dos seguintes números atendendo à quantidade de casas decimais (c. d.) assinaladas dentro do parênteses:

a)15,684 (1 c. d.) $\cong$

b)16,321 (2 c. d.) $\cong$

c)389,4832 (3 c. d.) $\cong$

d)9,6497 (0 c. d.) $\cong$

Bom Trabalho!
Professora

____
/Aurizanda de Barros Levy/

ESCOLA SECUNDÁRIA DE PALMAREJO

Proposta de correcção do 2º Teste Sumativo de Matemática - 1º trimestre

7º Ano - Teste A

<table>
<tr><th>Perg nº</th><th>Possíveis respostas</th><th>Pontuação Parcial</th><th>Pontuação Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>a) $\frac{9}{5} = 1,8$ Dízima finita

b) $\frac{13}{9} = 1,(4)$ Dízima Infinita Periódica

c) $\frac{11}{8} = 1,375$ Dízima Finita

d) $\frac{8}{3} = 2,(6)$ Dízima Infinita Periódica</td><td>5 pontos cada alínea</td><td>20 pontos</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$a)1,5 = \frac{3}{2}$
$b)2,38 = \frac{119}{50}$
$c)1,326 = \frac{663}{500}$
$d)0,0(81) = \frac{9}{110}$</td><td>7 pontos cada alínea</td><td>21 pontos</td></tr>
<tr><td>3</td><td><table>
<tr><td colspan="2">Valor Aproximado de 7/13</td><td>A menos de</td></tr>
<tr><td>Por defeito</td><td>Por excesso</td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>Uma unidade</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>0,6</td><td>Uma décima</td></tr>
<tr><td>0,53</td><td>0,54</td><td>Uma centésima</td></tr>
<tr><td>0,538</td><td>0,539</td><td>Uma milésima</td></tr>
</table></td><td>2,5 pontos cada alínea</td><td>20 pontos</td></tr>
<tr><td>4</td><td>a)19,3846 (2 c. d.) $\cong$ 19,38
b)637,594 (1 c. d.) $\cong$ 637,5
c)54,349 (0 c. d.) $\cong$ 54
d)6,2571 (3 c. d.) $\cong$ 6,257</td><td>2,5 pontos cada alínea</td><td>10 pontos</td></tr>
<tr><td>5</td><td>a)15,684 (1 c. d.) $\cong$ 15,7

b)16,321 (2 c. d.) $\cong$ 16,32

c)389,4832 (3 c. d.) $\cong$ 389,483

d)9,6497 (0 c. d.) $\cong$ 10</td><td>2,5 pontos cada alínea</td><td>10 pontos</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td></td><td>81 pontos</td></tr>
</table>